

УДК 519.86

## О СУЩЕСТВОВАНИИ РАВНОВЕСИЯ В ЭКОНОМИКЕ ОБМЕНА С ОДНИМ КЛАССОМ НЕВЫПУКЛЫХ ПРЕДПОЧТЕНИЙ ПОТРЕБИТЕЛЕЙ

*М.О. Гаврилова, М.А. Севодин*

### Аннотация

Работа посвящена исследованию моделей экономики обмена. Рассматриваются ситуации, в которых, в отличие от классических случаев, допускается нарушение выпуклости отношений предпочтения потребителей определенного типа. Устанавливаются свойства некоторых характеристик таких экономик. Доказывается существование равновесных цен и равновесных распределений товаров.

**Ключевые слова:** экономика обмена, отношение предпочтения, выпуклость, равновесие.

---

### Введение

Концепция экономического равновесия занимает одно из центральных мест в математической экономике [1–3]. Идеальная организация экономики, обеспечивающая ее эффективность при децентрализованном принятии решений, описывается именно с помощью теории экономического равновесия, носящей тем самым нормативный характер. В рамках классических моделей равновесия устанавливается, что идея децентрализации и идея оптимальности не противоречат друг другу. В то же время для выполнения этих положений приходится накладывать ряд ограничений на потребителей и производственные множества, участвующих в рассматриваемых моделях экономических систем. Одним из таких ограничений традиционно является выпуклость предпочтений потребителей (см., например, [1, 2, 4, 5]). До сих пор попытки снять это ограничение были связаны в основном с рассмотрением достаточно специальных экономик. В работе [6] можно найти необходимые ссылки на этот счет. В качестве примера подобных исследований мы укажем на статью [7], в которой доказано, что предположение о выпуклости предпочтений не является необходимым для существования равновесия в контексте больших экономик, где индивидуальные экономические агенты имеют незначительное влияние на общий результат экономики.

В настоящей работе исследуется возможность расширения именно требования выпуклости предпочтений потребителей. Рассуждения проводятся на примере одного из вариантов модели Эрроу–Дебре [8]. Условие выпуклости отношения предпочтения заменяется на более слабое условие выпуклости в конусе направлений. Результатом является доказательство существования равновесия в модели экономики обмена без каких-либо существенных дополнительных ограничений.

### 1. Выпуклые в конусе направлений предпочтения

Описание класса предпочтений, рассматриваемых в настоящей работе, начнем с уточнения того, что мы будем подразумевать под доступным набором потребителя и каково формальное представление предпочтений этого потребителя.

Состояние потребителя мы будем описывать вектором  $\mathbf{x}$ , компоненты которого указывают количества соответствующих потребляемых товаров (благ или услуг, поступивших в продажу в определенное время в определенном месте). Считается, что наличных товаров конечное число и их количество равно  $l$ . Количество же каждого товара – это компонента вектора  $\mathbf{x}$ , неотрицательное число  $x_k$  для  $k$ , изменяющегося от 1 до  $l$  ( $k = 1, \dots, l$ ). Таким образом,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_l) \in R_+^l$  – неотрицательному ортанту  $R^l$  (или  $\mathbf{x}$  принадлежит множеству потребительских благ  $R_+^l$ ).

Отношение предпочтения потребителя на множестве потребительских благ формализуем как бинарное отношение  $\preceq$  на  $R_+^l$ , которое является рефлексивным, транзитивным и полным (см., например, [1, 2, 4]). Мы будем рассматривать только непрерывные предпочтения [1], и поэтому в дальнейшем отношение предпочтения у нас еще и непрерывное бинарное отношение.

Для доказательства существования равновесия на отношения предпочтения принято накладывать требования монотонности и выпуклости (см., например, [1, 4, 8]). В настоящей работе мы обобщим данные требования и покажем, что равновесие существует и в экономике такого типа. Итак, от отношения предпочтения мы требуем выполнения следующих свойств:

$\alpha$ ) (монотонность)  $\mathbf{x} + \mathbf{z} \succeq \mathbf{x}$  для любого  $\mathbf{x} \in R_+^l$  для любого  $\mathbf{z} \in K$ , кроме того, существует такое число  $N > 0$ , что соотношение  $\mathbf{x} + \mathbf{z} \succeq \mathbf{x}$  выполняется для любых  $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in R_+^l$ ,  $\|\mathbf{z}\| \geq N$ ;

$\beta$ ) (выпуклость в конусе направлений  $T$ ) для всех  $\lambda \in [0, 1]$  и для всех  $\mathbf{x} \in R_+^l$  имеет место свойство:

$$\mathbf{y} \succeq \mathbf{x}, \quad \mathbf{z} \succeq \mathbf{x}, \quad \mathbf{y} - \mathbf{z} \in T \quad \text{влечет} \quad \lambda \mathbf{y} + (1 - \lambda)\mathbf{z} \succeq \mathbf{x}. \quad (1)$$

Здесь  $K \subset R_+^l$  – любой невырожденный конус, содержащий в качестве своей внутренней точки точку с единичными координатами, а конус  $T$  является замыканием множества  $R^l \setminus (\pm R_+^l)$ .

Нам, по сравнению с выпуклыми в конусе направлений предпочтениями, в большей степени потребуются строго выпуклые в конусе направлений  $T$  предпочтения. Определение таких предпочтений сформулируем так:

$\beta'$ ) отношение предпочтения является строго выпуклым в конусе направлений  $T$ , если для всех  $\lambda \in (0, 1)$  и для всех  $\mathbf{x} \in R_+^l$  имеет место следующее свойство:

$$\mathbf{y} \succ \mathbf{x}, \quad \mathbf{y} \neq \mathbf{x}, \quad \mathbf{y} - \mathbf{x} \in T \quad \text{влечет} \quad \lambda \mathbf{y} + (1 - \lambda)\mathbf{x} \succ \mathbf{x}. \quad (2)$$

Здесь обозначение  $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$  как обычно означает строгое предпочтение, то есть ситуацию, в которой  $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$ , но  $\mathbf{y} \succeq \mathbf{x}$  не имеет места ( $\mathbf{x} \in R_+^l, \mathbf{y} \in R_+^l$ ).

Строго выпуклое предпочтение в конусе направлений  $T$ , так же как это выполняется для просто выпуклых предпочтений, является выпуклым в том же конусе. В самом деле, возьмем  $\mathbf{y} \succeq \mathbf{x}$  и  $\mathbf{z} \succeq \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y} - \mathbf{z} \in T$ . Если  $\mathbf{y} = \mathbf{z}$  или если  $\lambda = 0$  или  $\lambda = 1$ , то соотношение (1) установлено. Если  $\mathbf{y} \neq \mathbf{z}$ , имеем  $\mathbf{y} \succeq \mathbf{z}$  или  $\mathbf{z} \succeq \mathbf{y}$  (полнота в определении отношения предпочтения). Предположим для определенности, что  $\mathbf{y} \succeq \mathbf{z}$ . Заменяя  $\mathbf{x}$  на  $\mathbf{z}$  в соотношении (2), получим  $\lambda \mathbf{y} + (1 - \lambda)\mathbf{z} \succ \mathbf{z}$ ; следовательно, в силу транзитивности предпочтения  $\lambda \mathbf{y} + (1 - \lambda)\mathbf{z} \succ \mathbf{x}$ . Это и есть требуемый результат.

Относительно накладываемых на отношения предпочтения требований  $\alpha$ ) и  $\beta$ ) (или  $\alpha$ ) и  $\beta'$ ) заметим следующее.

По сравнению с обычной трактовкой монотонности (см., например, [4]), когда вектор  $\mathbf{z}$  может быть произвольным вектором из  $R_+^l$ , требование  $\alpha$ ) допускает

ситуации, в которых, например, потребитель без определенного количества конкретного товара не может согласиться с увеличением количества другого товара. Что касается второй части требования  $\alpha$ ), то понятно, что большие количества пусть и одного товара из набора должны быть полезны для потребителя с точки зрения динамики, в силу его рыночных перспектив.

Обсуждая выпуклость в конусе направлений  $T$  отношения предпочтения, возьмем в соотношении (1)  $\lambda = 1/2$ ,  $\mathbf{y} \sim \mathbf{x}$  ( $\mathbf{y} \sim \mathbf{x}$  означает, что  $\mathbf{y} \succeq \mathbf{x}$  и в то же время  $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$ ; в этом случае говорят, что распределения  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  для потребителя равноценны или безразличны). Получим, что если участнику распределения  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  безразличны, он предпочтет каждому из них их среднее (предпочтение строгое, если выпуклость строгая). Это произойдет, если  $\mathbf{y} - \mathbf{x} \in T$ , например, в случае, когда  $\mathbf{y} - \mathbf{x} \in T$  и  $x_k = 0$ ,  $y_r = 0$ , но  $x_r \neq 0$ ,  $y_k \neq 0$ . Но у вектора  $(\mathbf{x} + \mathbf{y})/2$  его  $k$ -я координата  $(x_k + y_k)/2$  и  $r$ -я координата  $(x_r + y_r)/2$  уже не равны нулю, то есть распределение  $(\mathbf{x} + \mathbf{y})/2$  дает потребителю и товар  $k$ , и товар  $r$ , тогда как распределения  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  дают ему только один из этих товаров. Мы имеем дело здесь с эффектом насыщения, когда начиная с некоторого уровня уменьшается привлекательность потребления исключительно одного товара. Требование же выполнения этого эффекта лишь только для векторов  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \in T$  означает, что смешивать разрешается существенно противоположные наборы. Если, например,  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  достаточно близки друг к другу (близость векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  здесь понимается в смысле коллинеарности, то есть если отношения соответствующих координат векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  отличаются друг от друга незначительно, так что  $\mathbf{x} - \mathbf{y} \notin T$ ) и безразличны потребителю, то он, потребитель, не будет испытывать необходимости в  $(\mathbf{x} + \mathbf{y})/2$ , так как вектор  $(\mathbf{x} + \mathbf{y})/2$  не обладает по крайней мере видимыми преимуществами перед  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ . Но в этом случае  $\mathbf{x} - \mathbf{y} \notin T$ . Отметим, наконец, и тот факт, что определение выпуклости предпочтения не запрещает в случае  $\mathbf{x} - \mathbf{y} \notin T$  выполнения  $\lambda \mathbf{y} + (1 - \lambda)\mathbf{x} \succ \mathbf{x}$ .

Отношение предпочтения можно описать с помощью функции полезности. Вещественная функция, определенная на  $R_+^l$ , называется функцией полезности, представляющей отношение предпочтения  $\succeq$ , если для любых  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R_+^l$  выполняется следующее условие:  $u(\mathbf{x}) \geq u(\mathbf{y})$  тогда и только тогда, когда  $\mathbf{x} \succeq \mathbf{y}$ .

В работе [9] доказано, что для непрерывного отношения предпочтения существует непрерывная функция полезности, представляющая это отношение предпочтения (здесь важно, что и отношение, и функция определены на  $R_+^l$ -связном множестве). Выделим класс функций, которые задают выпуклые в конусе направлений  $T$  отношения предпочтения. Как обычно, сделаем это с помощью понятия квазивогнутости.

Функцию  $u$  будем называть квазивогнутой в конусе направлений  $T$ , если для любого действительного числа  $a$  множество

$$S_a = \{\mathbf{z} \in R_+^l | u(\mathbf{z}) \geq a\}$$

является выпуклым в конусе направлений  $T$ , то есть из условий  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S_a$ ,  $(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \in T$ , следует  $(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}) \in S_a$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

Имеет место

**Теорема 1.** *Отношение предпочтения является выпуклым в конусе направлений  $T$  тогда и только тогда, когда все представляющие его функции полезности квазивогнуты в конусе направлений  $T$ .*

Теорема 1 доказывается аналогично тому, как доказывается это утверждение в случае просто выпуклых предпочтений (см., например, [4]).

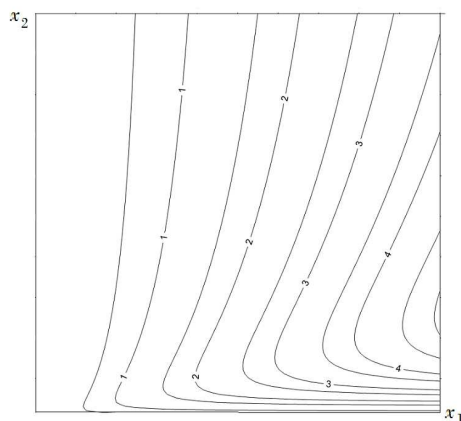


Рис. 1

Приведем пример, в котором фигурируют предпочтения, имеющие приведенные свойства. Рассмотрим задачу определения структуры портфеля ценных бумаг (ПЦБ) инвестора, или задачу распределения капитала объема  $Q$ , который участник рынка хочет потратить на покупку ценных бумаг двух различных видов. Пусть  $x_i$  – часть капитала, потраченного на закупку ценных бумаг  $i$ -го вида,  $i = 1, 2$ . Пусть также  $m_i$ ,  $\sigma_i$  – математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение эффективности  $i$ -го типа ценной бумаги,  $i = 1, 2$ , за один период владения. Будем считать, что эффективности бумаг не коррелированы.

Оптимизация структуры ПЦБ определяется конкретными целями инвестора, которые описывают с помощью соответствующих критериев оптимальности. В качестве одного из таких критериев часто выдвигается (см., например, [9]) отношение доходности портфеля к риску, то есть считается, что рост этого отношения говорит об улучшении инвестиционных свойств ПЦБ. В связи с этим представляется вполне естественным задать функцию полезности потребителя в виде

$$u(x_1, x_2) = \left( \frac{k(x_1 m_1 + x_2 m_2)}{\sqrt{x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2}} - 1 \right) Q,$$

где  $k$  – некоторый коэффициент пропорциональности.

Естественно также предположить, что при достаточно больших и достаточно малых  $Q$  потребитель не видит разницы между типами бумаг и начинает считать  $m_1 = m_2$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2$ .

Некоторые поверхности безразличия такой функции полезности с  $m_2 = 3m_1$ ,  $\sigma_2 = 3\sigma_1$ ,  $k = \sigma_1/m_1$  изображены на рис. 1. Из рисунка видно, что множества  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  не являются выпуклыми множествами. В то же время очевидно, что эти множества выпуклы в конусе направлений  $T$ . Вычисления показывают, что конус  $K$  из требования  $\alpha$ ) определяется равенством  $K = \{(x_1, x_2) \in R^2 \mid |(x_2 - x_1)/(x_2 + x_1)| \leq 0.81\}$ .

Таким образом, предпочтения потребителя в данном примере удовлетворяют сформулированным выше требованиям. Заметим, что рассмотренный пример соответствует известному факту из теории функций полезности: склонность к риску потребителя приводит к потере вогнутости его функции полезности (см., например, [10]).

## 2. Существование равновесия

Приведем математическую модель (см. [1–4]) экономической ситуации, которую мы будем рассматривать. На многопродуктовом рынке обмена  $m$  участникам (потребителям) нужно разделить между собой ресурсы общим объемом  $\Omega \in R_+^l$ . Предполагается, что каждый участник обладает частной собственностью на суммарные ресурсы  $\Omega$ , то есть в начальный момент участник  $i$  имеет набор товаров  $\mathbf{w}_i \in R_+^l$ . Затем на рынке происходит перераспределение общих ресурсов  $\Omega$  и каждый участник  $i$  получает в свою собственность набор товаров  $\mathbf{x}_i$ , причем выполняются равенства

$$W = \mathbf{w}_i + \dots + \mathbf{w}_m = \mathbf{x}_i + \dots + \mathbf{x}_m. \quad (3)$$

В дальнейшем вектор  $X = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) \in R^{lm}$  будем называть допустимым распределением, если векторы  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$  удовлетворяют соотношениям (3).

Пусть участник  $i$  характеризуется своим отношением предпочтения  $\succeq_i$  и начальными ресурсами  $\mathbf{w}_i \in R_+^l$ . Его функция полезности  $u_i$  зависит только от набора товаров, предназначенного участнику  $i$ . Мы считаем также, что отношения предпочтения  $\succeq_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , удовлетворяют свойствам  $\alpha\beta'$ ).

Введем систему цен на товары  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_l) \in R_+^l$ . Тогда потребитель  $i$  претендует на любой набор товаров  $\mathbf{y} \in R_+^l$  из бюджетного множества

$$I(r_i) = \left\{ \mathbf{y} \in R_+^l \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{y} \rangle \leq r_i = \sum_{k=1}^l p_k w_k^i \right\},$$

где  $\mathbf{w}_i = (w_1^i, \dots, w_l^i)$ .

Далее участник  $i$  действует в соответствии со своим отношением предпочтения, то есть он приступает к поискам набора товаров  $\mathbf{x}_i \in I(r_i)$  такого, что  $\mathbf{x}_i \succeq_i \mathbf{y}$  для любого  $\mathbf{y} \in I(r_i)$ . Таким образом, возникает следующая проблема согласования. Существует ли такая система цен  $\mathbf{p}$ , при которой допустимое распределение  $X = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$  состоит из векторов  $\mathbf{x}_i$ , каждый из которых является решением задачи максимизации  $u_i$  при соответствующем бюджетном ограничении?

Известно (см. [1, 4]), что бюджетное множество выпукло, компактно и не изменяется при умножении всех цен на одну и ту же постоянную  $\lambda > 0$ . Последнее свойство позволяет цены нормировать и рассматривать их только на множестве

$$\Pi = \{ \mathbf{p} \in R^l \mid p_1 + \dots + p_l = 1, \quad p_k > 0, \quad k = 1, \dots, l \}.$$

Множество  $\Pi$ , как обычно, назовем областью цен, через  $\bar{\Pi}$  обозначим замыкание  $\Pi$ , являющееся симплексом, через  $\Pi_k$  —  $k$ -ю грань симплекса:  $\Pi_k = \{ \mathbf{p} \in \bar{\Pi} \mid p_k = 0 \}$ , так что  $\Pi = \bar{\Pi} \setminus \bigcup_{k=1}^l \Pi_k$ .

Нам потребуется

**Теорема 2.** Пусть цена каждого товара строго положительна:  $p_k > 0$  при всех  $k$ . Тогда для каждого  $i$  и каждого  $r_i \geq 0$  существует единственный вектор  $\mathbf{x}_i \in I(r_i)$  такой, что  $\mathbf{x}_i \succeq_i \mathbf{y}$  для любого  $\mathbf{y} \in I(r_i)$ .

**Доказательство.** В силу наших требований, наложенных на отношение предпочтения, функция полезности  $u_i$  будет непрерывной функцией для любого  $i$ . Следовательно, она достигает своего наибольшего значения на компактном множестве  $I(r_i)$  в некоторой точке  $\mathbf{x}_i$ . Остается показать, что такая точка только одна.

Предположим, что существуют две точки  $\mathbf{x}_i \in I(r_i)$  и  $\mathbf{z}_i \in I(r_i)$ , удовлетворяющие условию:  $\mathbf{x}_i \succeq_i \mathbf{y}$  и  $\mathbf{z}_i \succeq_i \mathbf{y}$  для любого  $\mathbf{y} \in I(r_i)$ .

Полагая в этих отношениях последовательно  $\mathbf{y} = \mathbf{x}_i$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{z}_i$ , получаем, что  $\mathbf{x}_i \sim \mathbf{z}_i$ .

Теперь убедимся в том, что  $\mathbf{x}_i - \mathbf{z}_i \in T$ . Для этого достаточно проверить, что  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_i \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{z}_i \rangle$  или  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_i - \mathbf{z}_i \rangle = 0$ . Так как  $\mathbf{p} \in \Pi$ , то из последнего равенства будет следовать, что  $\mathbf{x}_i - \mathbf{z}_i \in T$ . Докажем, что  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_i \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{z}_i \rangle = r_i$ . Если, например,  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_i \rangle < r_i$ , то можно поступить так. Возьмем два вектора  $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in K$ ,  $\mathbf{b} \neq \mathbf{c}$ , таких, что  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{b} + \mathbf{x}_i \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{c} + \mathbf{x}_i \rangle = r_i$ . Пусть  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{b} + \mathbf{x}_i$  и  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{c} + \mathbf{x}_i$ . Оба вектора в силу их построения и монотонности отношения предпочтения  $\succeq_i$  удовлетворяют условиям:

$$\mathbf{v}_q \in I(r_i), \quad \langle \mathbf{p}, \mathbf{v}_q \rangle = r_i, \quad \mathbf{v}_q \succeq_i \mathbf{x}_i, \quad q = 1, 2.$$

Имеем, что  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \rangle = 0$ , следовательно,  $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \in T$  (вектор  $\mathbf{p}$  из  $\Pi$ ). В силу строгой выпуклости отношения предпочтения  $\succeq_i$  в конусе направлений  $T$  получим, что

$$\left( \frac{1}{2} \mathbf{v}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{v}_2 \right) \succ_i \mathbf{x}_i. \quad (4)$$

Точка  $\frac{1}{2} \mathbf{v}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{v}_2$  принадлежит  $I(r_i)$ , так как это множество выпукло; следовательно, формула (4) противоречит максимальной  $\mathbf{x}_i$ , то есть предположение  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_i \rangle < r_i$  не верно. Значит, и  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_i \rangle$ , и  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{z}_i \rangle$  равны  $r_i$ . Для того чтобы обосновать совпадение точек  $\mathbf{x}_i$  и  $\mathbf{z}_i$ , нам осталось повторить рассуждения, проведенные с точками  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$ . Теорема 2 доказана.  $\square$

Теорема 2 позволяет ввести функцию индивидуального спроса участника  $i$  как отображение  $\mathbf{d}_i$ , ставящее в соответствие любой системе цен  $\mathbf{p} \in \Pi$  вектор из его бюджетного множества, который предпочитается всем остальным. Так же, как обычно (см., например, [4]), доказывается, что для любого  $i$  отображение  $\mathbf{d}_i : \Pi \rightarrow R_+^l$  непрерывно и выполняется равенство

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{d}_i(\mathbf{p}) \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{w}_i \rangle. \quad (5)$$

Изучим теперь поведение отображения  $\mathbf{d}_i : \Pi \rightarrow R_+^l$  вблизи граничных точек  $\Pi$ . С точки зрения экономики понятно, что картина не изменилась, несмотря на потерю выпуклости, то есть раз участник  $i$  не насыщается товаром  $k$ , то потребление этим участником данного товара будет неограниченно возрастать по мере того, как цена  $p_k$  приближается к нулю. Следующая теорема подтверждает сказанное.

**Теорема 3.** Пусть  $r_i \geq 0$  и  $\mathbf{p} \in \Pi_k$ , то есть  $p_k = 0$ . Тогда справедливы следующие утверждения.

- 1) Для любого  $\mathbf{x} \in I(r_i)$  существует  $\mathbf{y} \in I(r_i)$  такой, что  $\mathbf{y} \succeq_i \mathbf{x}$  (не существует набора товаров, который участник  $i$  предпочитает всем остальным).
- 2) Если для всех  $j$   $w_j^i > 0$  и последовательность  $\mathbf{p}_n (\subset \Pi)$  сходится к  $\mathbf{p}$ , то потребление участника  $i$  стремится к бесконечности:

$$\sum_{k=1}^l d_k^i(\mathbf{p}_n) \rightarrow +\infty. \quad (6)$$

Если, кроме того,  $\mathbf{p} \notin \Pi_j$ ,  $j \neq k$ , то потребление  $i$ -м участником  $k$ -го товара стремится к бесконечности, то есть  $d_k^i(\mathbf{p}_n) \rightarrow +\infty$ .

Здесь  $\mathbf{d}_i(\mathbf{p}) = (d_1^i(\mathbf{p}), \dots, d_l^i(\mathbf{p}))$ .

**Доказательство.** Не ограничивая общности, будем считать, что  $k = 1$ .

Докажем первое утверждение. Пусть  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_i) \in I(r_i)$ . Положим  $\mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2, \dots, x_i)$ ,  $y_1 > 2N$ , где  $N$  – число из условия монотонности  $\alpha$ . Так как  $p_1 = 0$ , то  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \leq r_i$ , и, следовательно,  $\mathbf{y} \in I(r_i)$ . В силу монотонности отношения предпочтения  $\succeq_i$  имеем  $\mathbf{y} \succeq_i \mathbf{x}$ . Покажем, что это отношение можно считать строгим. Для этого рассмотрим вектор  $\mathbf{z} = (x_1 + \frac{y_1}{2}, x_2, \dots, x_i)$ . Из  $\alpha$  и выбора  $y_1$  следует, что  $\mathbf{z} \succeq_i \mathbf{x}$ . Заметим, что  $\mathbf{y} - \mathbf{x} \in T$ , а  $\mathbf{z} = \frac{1}{2}(\mathbf{x} + \mathbf{y})$ . В силу строгой выпуклости в конусе направлений  $T$  отношения предпочтения  $\succeq_i$  отсюда имеем  $\mathbf{z} \succeq_i \mathbf{x}$ . Монотонность предпочтения  $\succeq_i$  дает соотношение  $\mathbf{y} \succeq_i \mathbf{z}$ . Использование транзитивности приводит к нужному нам строгому предпочтению  $\mathbf{y} \succ_i \mathbf{x}$ .

Теперь докажем вторую часть утверждения 2) теоремы. Предположим противное, то есть что из последовательности  $\mathbf{p}_n$  можно извлечь такую подпоследовательность  $\mathbf{p}_{nq}$ , что спрос на  $k$ -й товар при этих ценах ограничен: существует  $C$ , для которой

$$d_k^i(\mathbf{p}_{nq}) \leq C.$$

Принадлежность векторов  $d^i(\mathbf{p}_{nq})$  бюджетным множествам  $I(r_{inq})$ ,  $r_{inq} = \langle w_i, \mathbf{p}_{nq} \rangle$ , влечет выполнение неравенств

$$0 \leq d_j^i(\mathbf{p}_{nq}) \leq \frac{r_{inq}}{p_{jnq}}, \quad 1 \leq j \leq l, \quad j \neq k,$$

из которых в силу сходимости  $p_{jnq}$  к  $p_j \neq 0$  вытекает ограниченность  $d_j^i(\mathbf{p}_{nq})$ . Таким образом, последовательность  $d_i(\mathbf{p}_{nq})$  ограничена и из нее можно извлечь сходящуюся подпоследовательность  $d_i(\mathbf{p}_{nqw})$ . Пусть  $d_i(\mathbf{p}_{nqw}) \rightarrow \mathbf{x}$ . Покажем, что  $\mathbf{x}$  является некоторым набором товаров. Более того,  $\mathbf{x} \in I(r_i)$  и  $\mathbf{x}$  предпочитается всем остальным векторам из  $I(r_i)$ . Это и будет противоречием, доказывающим наше утверждение.

В самом деле, так как  $d_i(\mathbf{p}_{nqw}) \in R_+^l$ , то и  $\mathbf{x} \in R_+^l$  в силу замкнутости  $R_+^l$ . Векторы исходной последовательности  $\mathbf{p}_n$  удовлетворяют соотношениям

$$\langle \mathbf{d}_i(\mathbf{p}_n), \mathbf{p}_n \rangle \leq \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{p}_n \rangle,$$

$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{p}_n \rangle \leq \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{p}_n \rangle \text{ влечет } \mathbf{d}_i(\mathbf{p}_n) \succeq \mathbf{y}.$$

Значит, эти соотношения выполнены и для подпоследовательности  $\mathbf{p}_{nqw}$  последовательности  $\mathbf{p}_n$ . Так как  $w_k^i$  строго положительны, то  $r_i = \langle w_i, \mathbf{p}_n \rangle \neq 0$ . Следовательно, можно перейти к пределу и получить

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{p} \rangle \leq \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{p} \rangle,$$

$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{p}_n \rangle \leq \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{p}_n \rangle \text{ влечет } \mathbf{x} \succeq \mathbf{y}.$$

Первое соотношение означает, что  $\mathbf{x} \in I(r_i)$ , а второе – что  $\mathbf{x}$  предпочитается любому товару из  $I(r_i)$ . Это противоречит установленному уже утверждению 1) теоремы. Таким образом, вторая часть утверждения 2) теоремы доказана. Соотношение (6) обосновывается аналогично (то есть первая часть утверждения 2) теоремы).  $\square$

Введем теперь в рассмотрение функцию избыточного спроса  $\mathbf{z} : \Pi \rightarrow R_+^l$ , определив ее равенством (см., например, [4])

$$\mathbf{z}(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^m d_i(\mathbf{p}) - W.$$

Равенство спроса и предложения на всем рынке выражается векторным равенством в  $R^l$ :

$$\mathbf{z}(\mathbf{p}) = 0. \quad (7)$$

Если вектор цен  $\mathbf{p} \in \Pi$  удовлетворяет уравнению (7), то его называют системой равновесных цен, а вектор  $(\mathbf{d}_1(\mathbf{p}), \dots, \mathbf{d}_m(\mathbf{p}))$  – соответствующим равновесным распределением.

В силу теоремы 2 и равенства (5) традиционно можно использовать следующее эквивалентное определение.

Вектор  $\mathbf{p} \in \Pi$  называется *системой равновесных цен*, а  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) \in R_+^{lm}$  – соответствующим *равновесным распределением*, если выполнены следующие условия:

- а) распределение  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$  допустимо;
- б)  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x}_i \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{w}_i \rangle$ ,  $i = 1, \dots, m$ ;
- в) для любого  $i$  принадлежность  $\mathbf{y} \in I(\langle \mathbf{p}, \mathbf{w}_i \rangle)$  влечет  $\mathbf{x}_i \succeq_i \mathbf{y}$ .

Приведем формулировку теоремы, гарантирующей существование равновесных цен.

**Теорема 4.** Пусть экономика частной собственности такова, что все  $m$  ее участников имеют отношения предпочтения со свойствами  $\alpha$ ),  $\beta'$ ). Если в начале каждый участник обладает всеми товарами, то есть  $w_k^i \neq 0$  одновременно для всех  $i$  и  $k$ , то существует по крайней мере одна система равновесных цен или существует вектор  $\mathbf{q} \in \Pi$  такой, что  $\mathbf{z}(\mathbf{q}) = 0$ .

**Доказательство.** Аналогичная теорема доказана в работе [8] в предположении, что отношения предпочтения участников строго выпуклы. Оказывается, если это условие заменить условием  $\beta'$ ), то теорема остается справедливой, причем доказательство теоремы не изменится. Дело в том, что доказательство основано [8] на существовании неподвижной точки у многозначного отображения  $F$  симплекса  $\bar{\Pi}$  в себя, которое определяется следующим образом [8]:

$$F(\mathbf{p}) = \begin{cases} \bar{\Pi}_{K(\mathbf{p})}, & \text{если } \mathbf{p} \in \Pi; \\ \{\mathbf{q} \in \bar{\Pi} \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = 0\} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_{K(\mathbf{p})} &= \{\mathbf{q} \in \bar{\Pi} \mid \text{для любого } k \notin K(\mathbf{p}) \quad q_k = 0\}, \\ K(\mathbf{p}) &= \{k \mid z_k(\mathbf{p}) \mid \max_j z_j(\mathbf{p})\}, \\ \mathbf{z}(\mathbf{p}) &= (z_1(\mathbf{p}), \dots, z_l(\mathbf{p})). \end{aligned}$$

Значения отображения  $F(\mathbf{p})$  являются выпуклыми, замкнутыми и непустыми множествами. Обоснование замкнутости графика отображения  $F(\mathbf{p})$  проводится на основе тех свойств функций  $\mathbf{z}(\mathbf{p})$  и  $\mathbf{d}_i(\mathbf{p})$ , которые при условии  $\beta'$ ) здесь уже получены (см. [4, 8]). Таким образом, теорема 4 доказана.  $\square$

Таким образом, можно сказать, что в модели экономики обмена замена требования строгой выпуклости предпочтений на требование строгой выпуклости в конусе направлений не влияет на существование равновесных цен.



### Summary

*M.O. Gavrilova, M.A. Sevodin.* On the Existence of Equilibrium in an Exchange Economy with One Class of Non-Convex Preferences of Consumers.

The paper focuses on the study of exchange economy models. It deals with situations that, unlike classical cases, allow for violations of the convexity of preference relations of consumers of a certain type. The properties of some characteristics of the economies under study are determined. Proofs of the existence of equilibrium prices and equilibrium distribution of goods are given.

**Key words:** exchange economy, preference relation, convexity, equilibrium.

### Литература

1. *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика. – М.: Мир, 1972. – 549 с.
2. *Полтерович В.М.* Экономическое равновесие и хозяйственный механизм. – М.: Наука, 1990. – 256 с.
3. *Канторович Л.В., Катмышев П.К., Кирута А.Я., Полтерович В.М.* О некоторых направлениях исследований в математической экономике // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. матем. – М.: ВИНТИ, 1982. – Т. 19. – С. 3–21.
4. *Экланд И.* Элементы математической экономики. – М.: Мир, 1983. – 248 с.
5. *Mas-Colell A.* Indivisible Commodities and General Equilibrium Theory // J. Econ. Theory. – 1977. – V. 16, No 2. – P. 443–456.
6. *Yamazaki A.* An equilibrium existence theorem without convexity assumptions // Econometrica. – 1978. – V. 46, No 3. – P. 541–555.
7. *Aumann R.J.* Existence of Competitive Equilibria in Markets with a Continuum of Traders // Econometrica. – 1966. – V. 34, No 1. – P. 1–17.
8. *Debreu G.* Four aspects of the mathematical theory of economic equilibrium // Proc. Int. Congress of Mathematicians, Vancouver, 1974, August 21–29 / Ed. R.D. James. – Can. Math. Congress, 1975. – V. 1. – P. 65–77.
9. *Debreu G.* Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium. – New Haven; London: Yale Univ. Press, 1959. – 114 p.
10. *Elton E.J., Gruber M.J.* Modern Portfolio Theory and Investment Analysis. – N. Y.: John Wiley and Sons, 1995. – 736 p.
11. *Кини Р.Л., Райфа Х.* Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. – М.: Радио и связь, 1981. – 560 с.

Поступила в редакцию  
25.10.10

---

**Гаврилова Мария Олеговна** – аспирант кафедры прикладной математики Пермского государственного технического университета.

E-mail: [olga@pstu.ru](mailto:olga@pstu.ru)

**Севодин Михаил Алексеевич** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики Пермского государственного технического университета.

E-mail: [msevodin@mail.ru](mailto:msevodin@mail.ru)